期中篇：

代数小讲堂

彭启航

基础知识部分

一、矩阵

① 向量组 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ $\alpha_i\in\mathbb{R}^n$

1. 线性相关：$\exists\, 0\neq x\in\mathbb{R}^k$ s.t. $\sum_{i=1}^{k}x_i\alpha_i=0$

2. 线性无关：$\sum_{i=1}^{k}x_i\alpha_i=0 \Leftrightarrow x_i=0$ 即 $x=0$

思考：在$\mathbb{R}^3$中，线性相关与线性无关的几何意义

3. 极大无关组 $\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_t}\}$ $t\le k$

秩 即 极大无关组的向量个数 此处 $r(S)=t$

4. 线性空间 可理解为向量组的推广

② 矩阵

1. 矩阵乘法 $A=(a_{ij})_{m\times k}$ $B=(b_{ij})_{k\times n}$

$AB=C\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $c_{ij}=\sum_{i=1}^{k}a_{ik}b_{kj}$ 故不满足交换律

2. 基础运算

幂 $A^rA^s=A^{r+s}$ $(AB)^r=(AB)\cdots(AB)\neq A^rB^r$

转置 $(AB)^T=B^TA^T$ 可逆 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

A与B互为逆阵：$AB=BA=I_n$

伴随 ① $AA^* = A^*A = |A| I_n$ ② $(cA)^* = c^{n-1} A^*$

③ $(AB)^* = B^*A^*$ ④ $|A^*| = |A|^{n-1}$

⑤ $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$ ⑥ $(A^*)^T = (A^T)^*$

⑦ $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

3. 初等变换 + 初等矩阵 $\longrightarrow$ Gauss 消元法 (必考)

的 Gauss 消去法归结如下:

第一步: 将线性方程组写成标准形式并写出系数矩阵的增广矩阵 $\widetilde{A}$.

第二步: 将 $\widetilde{A}$ 中某一行调到第一行, 使第一行第一列的元素不为零.

第三步: 将得到的矩阵的第一行乘以某个数加到第二行上, 消去第二行第一列的元素. 重复这一方法, 直到消去第一列除第一行以外的所有元素.

第四步: 重复上述步骤, 使第二行第二列的元素不为零并消去第二列上其余元素. 不断用这个方法, 将系数矩阵变成对角阵.

第五步: 在每一行乘以适当的数使系数矩阵变为单位阵, 从而写出线性方程组的解.

在上述步骤中, 我们对矩阵施行了以下 3 种变换:

(1) 两行对换; $\longrightarrow P_{ij}$ $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

(2) 以某一非零数乘以某一行; $\longrightarrow D_i(c)$ $D_i^{-1}(c) = D_i(\frac{1}{c})$

(3) 以某一数乘以某一行后加到另一行上去. $\longrightarrow T_{ij}(c)$ $T_{ij}^{-1}(c) = T_{ij}(-c)$

这 3 种变换并不改变线性方程组的解. 也就是说, 对应的新方程组与原方程组总是同解的.

4. 相抵标准型 $A \sim B$

$PAQ = P_1P_2 \cdots P_s A Q_1Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

与初等矩阵(可逆阵)相乘 不改变 矩阵的秩

5. 分块矩阵 Cauchy - Binet 公式略

二、行列式 $A = (a_{ij})$

1. a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

按第一行展开：$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$

2、① 上(下)三角阵 $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$　　结合矩阵理解

② 某行(列)全为0，则 $|A|=0$　　行列式的性质

③ 某行(列)乘以 c 得到 B，则 $|B| = c|A|$

④ 对换任意两行(列)，$|A|$ 改变符号

⑤ 某两行(列)成比例，$|A|=0$

⑥ 某行乘以 c 加到另一行，$|A|$ 不变

相关定理

定理 1.4.1 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是 n 阶行列式，第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，则对任意的 $r\,(r=1,2,\cdots,n)$ 有展开式：

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}. \tag{1.4.3}$$

又对任意的 $s \neq r$，有

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0. \tag{1.4.4}$$

定理 1.4.3 (Cramer 法则) 设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.4.9}$$

记这个方程组的系数行列式为 $|\boldsymbol{A}|$，若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则方程组有且仅有一组解：

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\ x_2 = \frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\ \cdots,\ x_n = \frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}, \tag{1.4.10}$$

其中 $|\boldsymbol{A}_j|\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是一个 n 阶行列式，它由 $|\boldsymbol{A}|$ 去掉第 j 列换上方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 组成的列而成.

Laplace 定理 略

3. Vander Monde 行列式　需熟用变用

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

4、降阶公式

设 $A \in M_m(\mathbb{R})$ $D \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |A||D - CA^{-1}B| & 若 A 可逆 \\ |D||A - BD^{-1}C| & 若 D 可逆 \end{cases}$$

以 A 可逆为例证明:

$$\underline{\begin{pmatrix} I_m & O \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两边取行列式即可

5、其他 $|AB| = |A||B|$ $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$

三、线性方程组解的理论 ☆

定理 3.10.1 设有 n 个未知数 m 个方程式组成的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3.10.1)$$

$Ax = \beta$

它的系数矩阵记为 A, 增广矩阵记为 $\widetilde{A}$, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \end{pmatrix}$$

$\widetilde{A} = (A \vdots \beta)$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

则有下列结论:

(1) 若 $\tilde{A}$ 与 A 的秩都等于 n, 则该方程组有唯一一组解;

(2) 若 $\tilde{A}$ 与 A 的秩相等但小于 n, 即 $\mathrm{r}(\tilde{A}) = \mathrm{r}(A) < n$, 则该方程组有无穷多组解;

(3) 若 $\tilde{A}$ 与 A 的秩不相等, 则该方程组无解.

$Ax=0$ 的解空间 记为 $\ker A$

则 $\dim \ker A = n - r(A)$

取 $\ker A$ 的一组基 $\{\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}\}$

它们即 方程组的基础解系

再来考虑 $Ax=\beta$ 先得 特解 γ

则知 $Ax=\beta$ 通解为 $\underline{\gamma + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}}$

满足 $A(\gamma + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r})$

$= A\gamma + \sum_{i=1}^{n-r} k_i A\eta_i = A\gamma = \beta$

常用判定:

$Ax=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A \mid \beta)$

推论: $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A \mid B)$

$XA=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r\begin{pmatrix} A \\ \hdashline B \end{pmatrix}$

典型例题部分

一、基础计算

① 线性方程组求解

(12分) 设 $\alpha=(1,-1,1,-1)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1. \end{cases}$$

的一个解, 其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$. 求方程组的所有解.

② 求解逆矩阵 $(A\mid I_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I_n\mid A^{-1})$

(12分) 求下述可逆矩阵的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

并将 A 表示成初等矩阵的乘积.

③ 行列式计算

1)

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n
\end{vmatrix}
$$

提示：

矩阵分解

2)

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\
a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & a_n b_n^{n-2} & b_n^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

提示：

Vander Monde

3)

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n
\end{vmatrix}.
$$

提示：

升阶

4)

计算下列矩阵的行列式的值:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
a_1^2 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\
a_2 a_1 + 1 & a_2^2 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2
\end{pmatrix}.
$$

提示：

降阶公式

二、进阶证明

① 标准单位向量与基础矩阵

例 2.2 求证：n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵的充要条件是对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0.$$

② 循环矩阵

例 2.12 下列形状的矩阵称为循环矩阵：

$$A\quad\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

求证：同阶循环矩阵之积仍是循环矩阵.

③ 伴随

(10 分) 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵 $(n\geq 3)$，并且 $a_{11}=0$. A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式. 证明：

$$\begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{n2} \\ A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=0.$$

④ 分块初等变换

例 2.60 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，求证：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2|.$$

⑤ 矩阵的秩

1) **例 3.60** 求证：$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$，$\mathrm{r}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\geq \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

2)

例 3.68 求证: n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵 (即 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$) 的充要条件是:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}) = n.$$

⑥ 摄动法

例 2.26 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, 求证: $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

⑦ 线性无关

3. (10 分) 设 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中列向量. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{\beta} \notin \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$.

⑧ 线性方程组 解的理论的应用

(15 分) 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, B 是 $s \times t$ 矩阵, C 是 $m \times t$ 矩阵. 证明: 若矩阵方程 $AXB = C$ 有解, 则

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A, C) \text{ 且 } \mathrm{r}(B) = \mathrm{r}\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}.$$